Clasa: a XI-a

Disciplina: MATEMATICĂ

TEMA ACTIVITĂȚII:

Sisteme de ecuații liniare

prof. Paula DĂRĂBAN, prof. Gheorghe DĂRĂBAN

Definiție. Se numește **sistem** de *m* **ecuații liniare** cu *n* **necunoscute**, un sistem de forma:

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{, unde } a_{ij}, b_i \in \mathbf{C}, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc **necunoscutele sistemului;**
- a_{ij} se numesc **coeficienții necunoscutelor** sau **coeficienții sistemului (S);**
- b_i se numesc **termenii liberi ai ecuațiilor** sau **termenii liberi ai sistemului.**

Definiție. Sistemul (S) se numește **omogen** daca toți termenii liberi $b_i,\ i=\overline{1,m}$ sunt egali cu zero:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Definiție. Se numește soluție a sistemului (S) orice sistem de numere $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ care este soluție pentru fiecare din ecuațiile sistemului.

Din punct de vedere al existenței soluției și al numărului de soluții, un sistem de ecuații liniare poate fi în una din situațiile:

- **Sistem incompatibil.** În acest situație sistemul nu are nici o soluție;
- **Sistem compatibil.** În această situație sistemul are cel puțin o soluție:
  a) Un sistem compatibil cu o singură soluție se numește **compatibil determinat;**
  b) Un sistem compatibil cu mai multe soluții se numește **compatibil nedeterminat.**

Observație. Un sistem liniar omogen admite întotdeauna cel puțin soluția $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, numită **soluția banală.**

Scrierea matriceală a unui sistem

Sistemului liniar (S) îi asociem următoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$, numită **matricea sistemului;**

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$, numită **matricea termenilor liberi;**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$, numită **matricea necunoscutelor;**

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$, numită **matricea extinsă a sistemului**

- Cu aceste notații sistemul (S) se scrie $A \cdot X = B$ - ceea ce reprezintă ***forma matriceală a sistemului liniar***.

Exemplu:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = -12 \end{cases}$$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ – matricea sistemului;
- $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$ – matricea termenilor liberi;
- $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ – matricea necunoscutelor;
- $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -5 & -12 \end{pmatrix}$ – matricea extinsă.

Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații

1. Metoda matriceală
2. Metoda lui Cramer
3. Metoda lui Gauss

Metoda matriceală

- Se aplică doar sistemelor de ***n*** ecuații si ***n*** necunoscute;
- Se scrie sistemul sub forma matriceală $A \cdot X = B$ și se calculează $det(A)$;
- Dacă $det(A) \neq 0$ se calculează A^{-1};
- Soluția sistemului este $X = A^{-1} \cdot B$.

Exemplu: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

- matricea sistemului: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
- matricea necunoscutelor: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
- matricea termenilor liberi: $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
- matricea extinsă: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
- forma matriceală a sistemului este $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

- **Calculăm** $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \cdot A^*$;
- $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 4 + 9 - 15 - 8 - 6 =$

  $= -44 \neq 0 \Rightarrow A$ - inversabilă ;
- $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ - matricea **transpusă**;
- $A^* = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$ - matricea **adjunctă**;

  - $d_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 4 = -14;$
  - $d_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10;$
  - $d_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$
  - $d_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$
  - $d_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$
  - $d_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3;$
  - $d_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 19;$
  - $d_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$
  - $d_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -13;$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-44} \begin{pmatrix} -14 & -10 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \\ 19 & 1 & -13 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-44} \begin{pmatrix} -14 & -10 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \\ 19 & 1 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-44} \begin{pmatrix} -44 \\ 0 \\ -88 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} \text{soluția sistemului.}$$

Cum soluția sistemului este **unică**, rezultă sistemul este ***compatibil determinat***.

- **Verificare**

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2 = 0 \\ 1 - 5 \cdot 0 + 2 = 3 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 7 \end{cases}$$

Metoda lui Cramer

- Se aplică doar sistemelor de ***n*** ecuații si ***n*** necunoscute când determinantul sistemului este nenul:

Teoremă. Fie (S) un sistem de ***n*** ecuații si ***n*** necunoscute:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Orice sistem liniar (S) pentru care determinantul sistemului $\det(A)$ este nenul, este ***compatibil determinat*** cu soluția dată de formulele:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \ldots; x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$, unde $\Delta = \det(A)$, Δx_k se obține din Δ înlocuind coloana coeficienților lui x_k cu coloana termenilor liberi, $k = \overline{1, n}$.

Exemplu:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

- $\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 4 + 9 - 15 - 8 - 6 = -44 \neq 0$

- $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 21 - 35 - 0 - 18 = -44$

- $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 7 + 0 + 9 - 14 - 0 = 0$
- $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -70 + 0 + 27 - 0 - 24 - 21 = -88$

- $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-44}{-44} = 1;$
- $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{0}{-44} = 0;$
- $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-88}{-44} = 2;$

Deci, $S = \{(1; 0,2)\}$, care verifică ecuațiile sistemului.

Metoda lui Gauss
(metoda eliminării parțiale)

- Se aplică sistemelor de ***m*** ecuații si ***n*** necunoscute, fără a face apel la calculul cu determinanți;
- Constă în transformarea echivalentă a sistemului prin transformări elementare, în sisteme în care necunoscuta x_1 apare numai în prima ecuație, iar în celelalte ecuații se elimină. Pentru sistemul astfel format se păstrează prima ecuație neschimbată, iar în celelalte $m-1$ ecuații se aplică procedeul pentru necunoscuta x_2, păstrând-o în a doua ecuație și eliminând-o din celelalte $m-2$ ecuații. Se repetă procedeul până când într-o ecuație a sistemului rămâne o singură necunoscută. Cu valoarea ei se înlocuiește în celelalte ecuații (de jos în sus) și se determină și celelalte necunoscute.

Obs. Transformările elementare care se fac asupra ecuațiilor sistemului, generând astfel sisteme echivalente, sunt următoarele trei tipuri:

1) schimbarea ordinii ecuațiilor în sistem;
2) înmulțirea oricărei ecuații a sistemului prin factori nenuli;
3) adunarea unei ecuații înmulțite cu un număr la o altă ecuație.

Exemplu:

1. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \quad /\cdot(-2)/\cdot(-3) \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ / \quad 13x_2 - 3x_3 = -6 \; /\cdot\left(-\frac{19}{13}\right) \\ / \quad 19x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ / \quad 13x_2 - 3x_3 = -6 \\ / \quad / \quad \frac{44}{13}x_3 = \frac{88}{13} \Rightarrow x_3 = 2 \end{cases}$$

- Înlocuim $x_3 = 2$ în cea de-a doua ecuație și obținem $x_2 = 0$;
- Înlocuim $x_3 = 2$, $x_2 = 0$ în prima ecuație și obținem $x_1 = 1$.

$$S = \{(1; 0,2)\}$$

2. $\begin{cases} x+y+z=2/\cdot(-2)/\cdot(-1)/\cdot(-2) \\ 2x-y-2z=-2 \\ x+4y+5z=8 \\ 2x+5y+6z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ /-3y-4z=-6\ /\cdot 1/\cdot 1 \\ /\ \ 3y+4z=6 \\ /\ \ 3y+4z=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -3y-4z=-6 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$

Se observă în acest caz că sistemul se reduce la rezolvarea unui sistem de 2 ecuații liniare cu trei necunoscute.

Vom nota pe $z=\alpha\in\mathbf{R}$ și vom obține $y=\frac{6-4\alpha}{3}$ și $x=\frac{\alpha}{3}$

Prin urmare sistemul are soluția $S=\left\{\left(\frac{\alpha}{3};\frac{6-4\alpha}{3};\alpha\right)/\alpha\in\mathbf{R}\right\}$

Observație. Cum componentele soluției depind de un parametru, atunci vom spune că sistemul liniar este **compatibil simplu nedeterminat**.

$$3.\ \begin{cases} x+5y+4z-13t=3\ /\cdot(-3)/\cdot(-2) \\ 3x-y+2z+5t=2 \\ 2x+2y+3z-4t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ /-16y-10z+44t=-7\ /\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ /\ \ -8y-5z+22t=-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ -16y-10z+44t=-7 \\ 0=-\frac{3}{2}\ (fals) \end{cases} \Rightarrow S=\emptyset$$

Observăm că acest ultim sistem conține o ecuație contradictorie ($0=-\frac{3}{2}$), fapt pentru care acest sistem este incompatibil, deci și sistemul inițial este **incompatibil.**

Aprofundare

Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} -mx + y + z = -1 \\ x - my + z = -1, \\ x + y - mz = m \end{cases}$ unde *m* este un număr real.

a) Arătați că $\det(A(0)) = 2$;

b) Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice $m \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1; 2\}$;

c) Să se rezolve și să se discute sistemul după valorile parametrului real m.

Rezolvare:

a) $\det\left(A(0)\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$

b) A inversabilă$\Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0$

$$\det\left(A(m)\right) = \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^3 + 1 + 1 + \mathrm{m} + \mathrm{m} + \mathrm{m} = -m^3 + 3m + 2$$

$$-m^3 + 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow -m^3 + m + 2m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \; -m(m^2 - 1) + 2(m + 1) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow -m(m + 1)(m - 1) + 2(m + 1) = (m + 1)(-m^2 + m + 2) =$$
$$= (m + 1)^2\,(2 - m) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \boldsymbol{R} \backslash \{-1; 2\}$$

c) Dacă $\boldsymbol{det(A(m)) \neq 0}$, adică $m \in \boldsymbol{R}\backslash\{-1; 2\}$, atunci sistemul este compatibil determinat, cu soluția unică dată de formulele lui Cramer.

$$\Delta = \det\left(A(m)\right) = (m+1)^2(2-m)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -m & 1 \\ m & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 - 1 + m + m^2 + 1 - m = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{vmatrix} = -m^2 + m - 1 + 1 + m^2 - m = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -m & 1 & -1 \\ 1 & -m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 1 - 1 - m - m - m = m^3 - 3m - 2 = -\Delta$$

Deci $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{(m+1)^2(2-m)} = 0;$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{(m+1)^2(2-m)} = 0;$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-(m+1)^2(2-m)}{(m+1)^2(2-m)} = -1.$$

$$S = \{(0; 0; -1)\}$$

Dacă $\mathbf{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{m})\big) = \mathbf{0}$, atunci distingem următoarele 2 cazuri:

i. Dacă $m = -1$, atunci sistemul devine $\begin{cases} x + y + z = -1 \;/\cdot\, (-1) /\cdot\, (-1) \\ x + y + z = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Se observă în acest caz că sistemul se reduce la rezolvarea unei ecuații liniare cu trei necunoscute.

Vom nota pe $y = \alpha \in \mathbf{R}, z = \beta \in \mathbf{R}$, atunci $x = -1 - \alpha - \beta$.

Prin urmare sistemul are soluția $S = \{(-1 - \alpha - \beta; \alpha; \beta)/\alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.

Observație. Cum componentele soluției depind de doi parametri, atunci vom spune că sistemul liniar este **compatibil dublu nedeterminat.**

ii. Dacă $m = 2$, atunci sistemul devine $\begin{cases} -2x + y + z = -1 \\ x - 2y + z = -1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 2 \ /\cdot(-1)/\cdot 2 \\ x - 2y + z = -1 \\ -2x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ / \ -3y + 3z = -3 \ {\color{red}/\cdot 1} \\ / \ \ 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ / \ -3y + 3z = -3 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Se observă în acest caz că sistemul se reduce la rezolvarea unui sistem de 2 ecuații liniare cu trei necunoscute.

Vom nota pe $z = \alpha \in \mathbf{R}$ și vom obține $x = y = 1 + \alpha$.

Prin urmare sistemul are soluția $S = \{(1 + \alpha; 1 + \alpha; \alpha)/\alpha \in \mathbf{R}\}$

Observație. Cum componentele soluției depind de un parametru, atunci vom spune că sistemul liniar este **compatibil simplu nedeterminat**.

Temă

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$ unde $m \in \boldsymbol{R}$

a) Calculați determinantul matricei sistemului;

b) Determinați valorile reale ale lui *m* pentru care sistemul are soluție unică;

c) În cazul $m = 2$, determinați soluția $(x_{0,} y_0, z_0)$ a sistemului pentru care $x_0 > 0$ și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} -x + ay + (2a + 4)z = 1 \\ (a + 2)x + ay + (a + 1)z = 1 \\ (a + 1)x + (2a - 1)y + 3z = 2 \end{cases}$ unde $a \in \boldsymbol{R}$

a) Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3 + 9a^2 - 3a - 9$

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Pentru $a = -2$, rezolvați sistemul.

3. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2ay + z = -1 \\ 2ax + y + (a+1)z = 0 \end{cases}$ unde $a \in \boldsymbol{R}$.

a) Rezolvați sistemul pentru $a = 0$;

b) Determinați $a \in \boldsymbol{R}$ pentru care sistemul este compatibil determinat;

c) Pentru $a = -1$, rezolvați sistemul.